Méthodes mathématiques pour la physique
(controle du 15/11/2008)

Exercice 1. Considérons la fonction $f(x) = |x+2| - |x-2|$. Calculer $\dfrac{df}{dx}$ et $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$ au sens des distributions (c'est-à-dire, trouver $(T_f)'$ et $(T_f)''$).

Exercice 2. Considérons la fonction $f(x)$ de période 2 définie par

$$f(x) = |x| \qquad \text{pour } -1 < x \leq 1.$$

1. Développer cette fonction en série de Fourier.
2. Ecrire l'identité de Parseval correspondant à cette série de Fourier.

Exercice 3. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = x^2,$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Vérifier le résultat.

Exercice 4. En utilisant la méthode des fonctions de Green, trouver la solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) + 9y(x) = \sin 2x,$$

vérifiant les conditions limites $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$. Expliquer pourquoi la méthode des fonctions de Green n'est pas appliquable aux conditions limites $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

Exercice 5.

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{pour } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{pour } |x| > 1. \end{cases}$$

2. En utilisant le résultat, calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^2} \cos \frac{t}{2} \, dt\,.$$